
Lógica de Predicados

Jomi Fred Hübner
jomi@inf.furb.br

FURB / BCC

Motivação

- Considerando o seguinte raciocínio
 - ★ Todo aluno de Computação é inteligente.
 - ★ Luciano é aluno de Computação.
 - ★ Portanto, Luciano é inteligente.
- Como representar essa inferência com a Lógica Proposicional?

Sintaxe

Alfabeto

O alfabeto da lógica proposicional é constituído dos seguintes símbolos:

- símbolos de pontuação: (,)
- símbolos verdade: *true*, *false*
- variáveis: x, y, z, w, x, \dots
- funções: f, g, h, \dots
- predicados: p, q, r, \dots
- conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Termos

- Os termos fazem referência a **objetos** do mundo
- Sintaxe:
 - ★ as variáveis e as funções são termos,
 - ★ os parâmetros das funções devem ser termos.
- Exemplos:
 - ★ x (variável)
 - ★ $f(x)$ (função de aridade 1)
 - ★ 5 (função de aridade 0, constante)
 - ★ *marcos* (constante)
 - ★ $soma(f(x), soma(2, 3))$ (função de aridade 2)

Átomos

- Os átomos fazem referências às **propriedades** ou **relações** dos objetos do mundo.
- Sintaxe:
 - ★ os símbolos verdade e os predicados são átomos,
 - ★ os parâmetros de um predicados devem ser termos.
- Exemplos:
 - ★ *false* (símbolo verdade)
 - ★ *chove* (predicado de aridade 0 – proposição)
 - ★ *aluno(marcos)* (predicado de aridade 1 – propriedade)
 - ★ *mae(maria, carlos)* (predicado de aridade 2 – relação)

Fórmulas

- Os átomos são fórmulas.
- Se ϕ e ψ são fórmulas e x é uma variável, então também são fórmulas
 - ★ $(\neg\phi)$, (**negação**)
 - ★ $(\phi \wedge \psi)$, (**conjunção**)
 - ★ $(\phi \vee \psi)$ (**disjunção**)
 - ★ $(\phi \rightarrow \psi)$ (**implicação**)
 - ★ $(\phi \leftrightarrow \psi)$ (**bi-implicação**)
 - ★ $(\forall x \phi)$ (**quantificador universal**)
 - ★ $(\exists x \phi)$ (**quantificador existencial**)

Exemplos fórmulas **bem** formadas:

- $q \wedge p$
- $true$
- $\neg p$
- $\forall x p(x)$
- $\forall x p(x, y)$
- $\forall x aluno(x) \rightarrow inteligente(x)$

Ordem de Precedência

Para simplificar a escrita das fórmulas, utiliza-se a seguinte ordem de precedência entre os conectivos

- (maior precedência) $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \exists \forall$ (menor precedência).

Escopo dos quantificadores

- O escopo determina a abrangência de um quantificador.
- Na fórmula $p(x, y) \wedge (\forall_x q(x) \rightarrow u(x, y))$
 - ★ O escopo do \forall_x é $q(x) \rightarrow u(x, y)$
 - ★ A variável x dos predicados $q(x)$ e $u(x, y)$ está **ligada** ao escopo do \forall_x .
 - ★ Como as variáveis x e y de $p(x, y)$ e a variável y do $u(x, y)$ não possuem quantificadores, são ditas variáveis **livres**.

Semântica

Interpretação dos **átomos** sem variáveis

$\text{aluno}(\textit{marcos})$	$\text{par}(\textit{soma}(2, 3))$
v	v
v	f
f	v
f	f

Interpretação dos átomos **com** variáveis

Qual a interpretação de $\text{aluno}(x)$?

Interpretação dos átomos **com** variáveis

Qual a interpretação de $\text{aluno}(x)$?

x	$\text{aluno}(x)$
<i>marcos</i>	v
<i>marcos</i>	f
<i>carlos</i>	v
<i>carlos</i>	f
...	

Como na lógica proposicional, cada linha é uma possível interpretação para a fórmula $\text{aluno}(x)$. Contudo, além da interpretação da fórmula, existe uma atribuição de valor para suas variáveis.

A interpretação e a atribuição de valores correspondente a segunda linha é escrita como $I[\text{aluno}(x)]_{[x/\text{marcos}]} = f$.

x/marcos significa “ x sendo substituído por ‘marcos’”.

O conjunto de valores para as variáveis é representado por \mathcal{U} . Esse conjunto também é a imagem de todas as funções e os valores para os termos (parâmetros dos predicados).

Interpretação dos quantificadores

- A fórmula $\forall x \phi$
 - ★ é verdade sss ϕ é verdade para **todos** os valores de x ;
 - ★ é falsa quanto existir **um** valor para x tal que ϕ é falso.
- A fórmula $\exists x \phi$
 - ★ é verdade sss ϕ é verdade para pelo menos **um** valor de x ;
 - ★ é falso sss ϕ é falso para **todos** os valores de x ;

- ★ Sendo $\mathcal{U} = \{marcos, carlos\}$, $aluno(x)$ é satisfatível em uma interpretação onde $aluno \equiv$ “ser aluno”, $x = marcos$ e Marcos é um aluno.
- ★ Sendo $\mathcal{U} = \{marcos, carlos\}$, $\exists_x aluno(x)$ é satisfatível em uma interpretação onde $aluno \equiv$ “ser aluno” e ou Marcos ou Carlos são alunos.
- ★ Sendo $\mathcal{U} = \{marcos, carlos\}$, $\forall_x aluno(x)$ é satisfatível em uma interpretação onde $aluno \equiv$ “ser aluno” e Marcos e Carlos são alunos.

- Um **Modelo** é uma interpretação que satisfaz uma fórmula para qualquer atribuição de valores às variáveis livres
 - ★ Sendo $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, para uma interpretação onde $m \equiv$ “maior que” e $i \equiv$ “igual a”, qualquer atribuição de valores para x e y satisfaz $m(x, y) \vee m(y, x) \vee i(x, y)$.
- Um fórmula é válida (ou **tautologia**) sss ela é verdade para toda interpretação e atribuição de valores às variáveis.
 - ★ Exemplo $(\neg \forall x p(x)) \vee (\neg \forall x p(x))$
- Uma fórmula é uma **contradição** sss não existir interpretação e atribuição de valores que a torne verdade.

Exemplo de semântica

- Exemplo: $\forall_x \exists_y m(s(2, x), y)$
- Qual o significado de x , y , m , s e 2 ?
 - ★ 2 é uma função constante, sua interpretação é simplesmente o número 2 !
 - ★ s é uma função que tem como interpretação a soma dos dois parâmetros.
 - ★ As variáveis x e y têm como interpretação um valor do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} = 0 \dots \infty$).
 - ★ m é interpretado como a relação de “menor que”.
- Para todo número natural x existe um número natural y tal que $2 + x < y$.

Algumas equivalências

- $(\forall x \phi) \equiv (\neg \exists x \neg \phi)$
 - ★ Todo aluno é inteligente.
 - ★ Não é verdade que existe um aluno que não é inteligente.
- $(\exists x \phi) \equiv (\neg \forall x \neg \phi)$
 - ★ Existe um aluno bonito.
 - ★ Não é verdade que todos os alunos não são bonitos.

Material de **consulta**

- SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. **Parte 2**.
- NOLT, John; ROHATYN, Dennis. **Lógica**. McGraw-Hill, 1991. **Capítulo 6**